EMBEDDING PRODUCTS OF GRAPHS INTO EUCLIDEAN SPACES

Mikhail Skopenkov

Abstract. For any collection of graphs $G_1, \dots, G_N$ we find the minimal dimension d such that the product $G_1 \times \dots \times G_N$ is embeddable into $\mathbb{R}^d$. In particular, we prove that $(K_5)^n$ and $(K_{3,3})^n$ are not embeddable into $\mathbb{R}^{2n}$, where K_5 and $K_{3,3}$ are the Kuratowski graphs. This is a solution of a problem of Menger from 1929. The idea of the proof is the reduction to a problem from so-called Ramsey link theory: we show that any embedding $\operatorname{Lk} O \to S^{2n-1}$, where O is a vertex of $(K_5)^n$, has a pair of linked $(n-1)$-spheres.

Introduction. Our main result is the solution of the Menger problem from [Men29]: we prove that $(K_5)^N \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2N}$. Moreover, for a given collection of graphs $G_1, \dots, G_N$ we find the minimal dimension d such that $G_1 \times \dots \times G_N \hookrightarrow \mathbb{R}^d$. We denote by K_n *a complete graph* on n vertices and by $K_{n,n}$ *a complete bipartite graph* on $2n$ vertices. We write $K \hookrightarrow \mathbb{R}^d$, if a polyhedron K is piecewise linearly embeddable into $\mathbb{R}^d$.

The topological problem of embeddability is a very essential one (e. g., see [Sch84, ReSk99, ARS01, Sko07]). Our special case of the problem is interesting because the complete answer can be obtained and is stated easily, but the proof is non-trivial and contains interesting ideas.

Theorem 1. *Let $G_1, \dots G_n$ be connected graphs, distinct from point, I and S^1. The minimal dimension such that $G_1 \times \dots \times G_n \times (S^1)^s \times I^i \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ is*

$$d = \begin{cases} 2n+s+i, & \text{if either } i \neq 0 \text{ or some } G_k \text{ is planar (i. e., } G_k \not\supset K_5, K_{3,3}\text{)}, \quad (1) \\ 2n+s+1, & \text{otherwise.} \quad (2) \end{cases}$$

Theorem 1 remains true in topological category. We first prove Theorem 1 in piecewise linear category and then deduce the topological version from the piecewise linear one. From now and till that moment we work in the piecewise linear category.

Theorem 1 was stated (without proof) in [Gal93], cf. [Gal92]. The proof of embeddability is trivial (see below). The non-embeddability has been proved earlier in some specific cases. For example, it was known that $Y^n \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, where Y is a *triod* (letter "Y"). A nice proof of this folklore result is presented in [Sko07], cf. [ReSk01]. Also it was known that $K_5 \times S^1 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (Tom Tucker, private communication). In [Um78] it is proved that $K_5 \times K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$; that proof contains about 10 pages of calculations involving spectral sequences. We obtain a shorter geometric proof of this result (see Example 2 and Lemma 2 below). The proof of the non-embeddability in case (2), namely, Lemma 2, is the main point of Theorem 1 (while case (1) is reduced easily to a result of van Kampen.)

Our proof of Theorem 1 is quite elementary, in particular, we do not use any abstract algebraic topology. We use a reduction to a problem from so-called *Ramsey link theory* [S81, CG83, SeSp92, RST93, RST95, LS98, Neg98, SSS98, T00, ShTa]. The classical Conway–Gordon–Sachs theorem of Ramsey link theory asserts that any embedding of K_6 into $\mathbb{R}^3$ has a pair of (homologically) linked cycles. In other words, K_6 *is not linklessly embeddable into* $\mathbb{R}^3$. The graph $K_{4,4}$ has the same property (the Sachs theorem, proved in [S81]). Denote by σ_n^m the m-skeleton of a n-simplex. For a polyhedron σ let σ^{*n} be the join of n copies of σ. In our proof of Theorem 1 we use the following higher dimensional generalization of the Sachs theorem:

1991 *Mathematics Subject Classification.* 57Q35, 57Q45.

Key words and phrases. Embedding, van Kampen obstruction, graph, product, almost embedding, linkless embedding, Ramsey link theory.

The author was supported in part by INTAS grant 06-1000014-6277, Russian Foundation of Basic Research grants 05-01-00993-a, 06-01-72551-NCNIL-a, 07-01-00648-a, President of the Russian Federation grant NSh-4578.2006.1, Agency for Education and Science grant RNP-2.1.1.7988, and Moebius Contest Foundation for Young Scientists.

Lemma 1. *Any embedding $(\sigma_3^0)^{*n} \hookrightarrow S^{2n-1}$ has a pair of linked $(n-1)$-spheres.*

Lemma 1 follows from Lemma 1' below. For higher dimensional generalizations of the Conway-Gordon-Sachs theorem see [SeSp92, SSS98, T00].

The easy part of Theorem 1 and some heuristic considerations. Let us prove first all assertions of Theorem 1 except the non-embeddability in case (2).

Proof of the embeddability in Theorem 1. We need the following two simple results:

(*) If a polyhedron $K \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ and $d > 0$, then $K \times I$, $K \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ (it is sufficient to prove this for $K = \mathbb{R}^d \cong \mathring{D}^d$, for which this is trivial).

(**) For any d-polyhedron K^d the cylinder $K^d \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ [RSS95].

Set $G = G_1 \times \dots \times G_n$. By general position $G \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. If $i \neq 0$, then by (**) $G \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. And if, say, $G_1 \subset D^2$, then by (**) $D^2 \times G_2 \times \dots \times G_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, whence $G \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Applying (*) several times we get the embeddability assertion in all cases considered. $\square$

Proof of the non-embeddability in case (1). Note that any connected graph, distinct from a point, I and S^1, contains a triod Y. So it suffices to prove that $Y^n \times I^{s+i} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+s+i-1}$. Since $CK \times CL \cong C(K * L)$ and $K * \sigma_0^0 = CK$ for any polyhedra K and L, it follows that

$$Y^n \times I^{s+i} = (C\sigma_2^0)^n \times (C\sigma_0^0)^{s+i} \cong \underbrace{C \dots C}_{s+i+1 \text{ times}} (\sigma_2^0)^{*n}.$$

If a polyhedron $K \not\hookrightarrow S^d$ then the cone $CK \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ (because we work in piecewise linear category). So the non-embeddability in case (1) follows from $(\sigma_2^0)^{*n} \not\hookrightarrow S^{2n-2}$ [Kam32] (and also from $Y^n \not\hookrightarrow S^{2n-1}$ [Sko07]). $\square$

We are thus left with the proof of the non-embeddability in case (2). To make it clearer we anticipate it with considering heuristically three simplest cases.

Example 1. Let us first prove that the Kuratowski graph K_5 not planar. Suppose to the contrary that $K_5 \subset \mathbb{R}^2$. Let O be a vertex of K_5 and D a small disc with the center O. Then the intersection $K_5 \cap \partial D$ consists of 4 points. Denote them by A, B, C, D, in the order along the circle ∂D. Note that the pairs A, C and B, D are the ends of two disjoint arcs contained in $K_5 - \mathring{D}$, and, consequently, in $\mathbb{R}^2 - \mathring{D}$. Then the cycles $OAC, OBD \subset K_5$ intersect each other transversally at exactly one point O, which is impossible in the plane. So $K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

Example 2. Now let us outline why $K_5 \times K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$. (Other proof is given in [Um78].) Recall that if K is a polyhedron and $O \in K$ is a vertex, then *the star* $\operatorname{St} O$ is the union of all closed cells of K containing O, and *the link* $\operatorname{Lk} O$ is the union of all cells of $\operatorname{St} O$ not containing O. In our previous example $\operatorname{Lk} O$ consists of 4 points and the proof is based on the fact that there are two pairs of points of $\operatorname{Lk} O$ linked in ∂D. Now take $K = K_5 \times K_5$. We get $\operatorname{Lk} O \cong K_{4,4}$. So by the Sachs theorem above any embedding $\operatorname{Lk} O \hookrightarrow \partial D^4$ has a pair of linked cycles $\alpha, \beta \in \operatorname{Lk} O$. Thus we can prove that $K \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$ analogously to Example 1, if we construct two disjoint 2-surfaces in $K - \operatorname{St} O$ with boundaries α and β respectively. This construction is easy, see the proof of Lemma 2 below for details. Analogously it can be shown that $\sigma_6^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$ (another proof is given in [Kam32].)

Example 3. Let us show why $K_5 \times S^1 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$. (Other proof was given by Tom Tucker; this can be also proved analogously to Example 2.) Suppose that $K_5 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$; then by (*) $K_5 \times S^1 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. But $S^1 \times S^1 \supset K_5$, so $K_5 \times K_5 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, which contradicts Example 2.

Proof of the non-embeddability in case (2) modulo some lemmas. Let us say that a PL map $f : K \to L$ between two polyhedra K and L with fixed triangulations is *an almost embedding*, if for any two *disjoint* closed cells $a, b \subset K$ we have $fa \cap fb = \emptyset$ [FKT94].

Lemma 2. *(for $n = 2$ [Um78]) The polyhedron $(K_5)^n$ is not almost embeddable into $\mathbb{R}^{2n}$.*

Proof of the nonembeddability in case (2) *of Theorem 1 modulo Lemma 2.* By the Kuratowsky graph planarity criterion any nonplanar graph contains a graph homeomorhic either to K_5 or to $K_{3,3}$. So we may assume that each G_k is either K_5 or $K_{3,3}$. Analogously to Example 3 we may assume that $s = 0$. Now we are going to replace all the graphs $K_{3,3}$ by K_5-s.

Note that K_5 is almost embeddable to $K_{3,3}$ (Fig. 1). Indeed, map a vertex of K_5 into the middle point of an edge of $K_{3,3}$ and map the remaining four vertices onto the four vertices of $K_{3,3}$ not belonging to this edge. Then map each edge e of K_5 onto the shortest (with respect to the number of vertices) arc in $K_{3,3}$, joining the images of the ends of e, and the almost embedding is constructed.

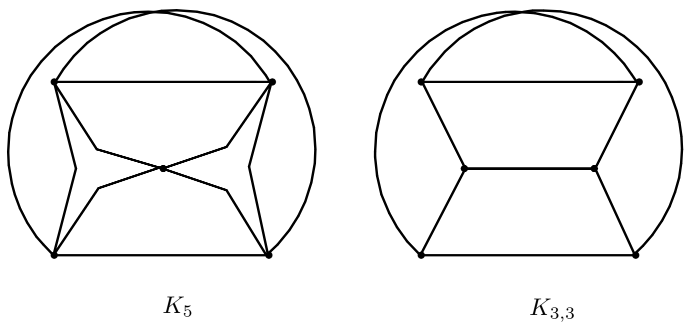

Fig. 1.

Now note that a product of almost embeddings is an almost embedding, and also a composition of an almost embedding and an embedding is an almost embedding. Thus the nonembeddability in case (2) of Theorem 1 follows from Lemma 2. $\square$

For the proof of Lemma 2 we need the following notion. Let A, B be a pair of PL n-manifolds with boundary and let $f : A \to \mathbb{R}^{2n}$, $g : B \to \mathbb{R}^{2n}$ be a pair of PL maps such that $f\partial A \cap g\partial B = \emptyset$. Take a general position pair of PL maps $\bar{f} : A \to \mathbb{R}^{2n}$ and $\bar{g} : B \to \mathbb{R}^{2n}$ close to f and g respectively. The mod 2 *intersection index* $fA \cap gB$ is the number of points mod 2 in the set $\bar{f}A \cap \bar{g}B$. We are going to use the following simple result:

(***) if both A and B are closed manifolds, then $fA \cap gB = 0$.

(This follows from the homology intersection form of $\mathbb{R}^{2n}$ being zero.) Lemma 2 will be deduced from the following generalization of Lemma 1:

Lemma 1'. *Let $L = (\sigma_3^0)^{*n}$. Then for any almost embedding $CL \to \mathbb{R}^{2n}$ there exist two disjoint $(n-1)$-spheres $\alpha, \beta \subset L$ such that the intersection index $fC\alpha \cap fC\beta$ is* 1.

Proof of Lemma 2 modulo Lemma 1'. Assume that there exists an almost embedding $f : K = K_5 \times \cdots \times K_5 \to \mathbb{R}^{2n}$. Let $O = O_1 \times \cdots \times O_n$ be a vertex of K. By the well-known formula for link

$$\operatorname{Lk} O \cong \operatorname{Lk} O_1 * \cdots * \operatorname{Lk} O_n \text{ and } \operatorname{St} O = C \operatorname{Lk} O \cong C(\sigma_3^0)^{*n}.$$

Let $\alpha, \beta \subset \operatorname{Lk} O$ be a pair of $(n-1)$-spheres given by Lemma 1'. Identify $\operatorname{Lk} O$ and $\operatorname{Lk} O_1 * \cdots * \operatorname{Lk} O_n$. Since α and β are disjoint, it follows that for each $k = 1, \dots, n$ the sets $\alpha \cap \operatorname{Lk} O_k$ and $\beta \cap \operatorname{Lk} O_k$ are disjoint and each of them consists of 2 points. By definition, put $\{A_k, C_k\} := \alpha \cap \operatorname{Lk} O_k$ and $\{B_k, D_k\} := \beta \cap \operatorname{Lk} O_k$. Consider two n-tori

$$T_\alpha = O_1 A_1 C_1 \times \cdots \times O_n A_n C_n \text{ and } T_\beta = O_1 B_1 D_1 \times \cdots \times O_n B_n D_n$$

contained in K.

Clearly, $T_\alpha \supset C\alpha$, $T_\beta \supset C\beta$ and $T_\alpha \cap T_\beta = O$. Since f is an almost embedding, it follows that $fT_\alpha \cap fT_\beta = fC\alpha \cap fC\beta$. So $fT_\alpha \cap fT_\beta = 1$ by the choice of α and β. By (***) we obtain a contradiction, so $K \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. $\square$

Proof of Lemma 1'. The proof is similar to that of Conway–Gordon–Sachs theorem and applies the idea of [Kam32], only we use a more refined obstruction. The reader can restrict attention to the case when $n = 2$ and obtain an alternative proof of the Sachs theorem. (The proof for $n > 2$ is completely analogous to that for $n = 2$.)

We show that for any $(n-1)$-simplex c of L and any almost embedding $f : CL \to \mathbb{R}^{2n}$ there exist a pair of disjoint $(n-1)$-spheres $\alpha, \beta \subset L$ such that $\alpha \supset c$ and the intersection index $fC\alpha \cap fC\beta = 1$.

For an almost embedding $f : CL \to \mathbb{R}^{2n}$ let $v(f) = \sum (fC\alpha \cap fC\beta) \mod 2$ be *the Van Kampen obstruction* to linkless embeddability. Here the sum is over all pairs of disjoint $(n-1)$-spheres $\alpha, \beta \subset L$

such that $c \subset \alpha$. It suffices to prove that $v(f) = 1$. Our proof is in 2 steps: first we show that $v(f)$ does not depend on f, and then we calculate $v(f)$ for certain 'standard' embedding $f : CL \to \mathbb{R}^{2n}$.

Let us prove that $v(f)$ does not depend on f [cf. Kam32, CG83]. Take any two almost embeddings $F_0, F_1 : CL \to \mathbb{R}^{2n}$. By general position in piecewise linear category there exists a homotopy $F : I \times CL \to \mathbb{R}^{2n}$ between them such that

1) there is only a finite number of *singular* moments t, i. e. moments $t \in I$ such that F_t is not an almost embedding;

2) for each singular t there is exactly one pair of disjoint $(n-1)$-simplices $a, b \subset L$ such that $F_t Ca \cap F_t b \neq \emptyset$;

3) the intersection $F_t Ca \cap F_t b$ is "transversal in time", i. e. $F(t \times Ca) \cap F([t-\varepsilon, t+\varepsilon] \times b)$ is transversal for some $\varepsilon > 0$.

Consider a singular moment t. The property 3) implies that the intersection index $F_t C\alpha \cap F_t C\beta$ of a pair of disjoint $(n-1)$-spheres $\alpha, \beta \subset L$ changes with the increasing of t if and only if either $\alpha \supset a$, $\beta \supset b$ or $\alpha \supset b$, $\beta \supset a$. Such pairs (α, β) satisfying the condition $\alpha \supset c$ are called *critical.* If $c \cap (a \cup b) = \emptyset$, then there are exactly 2 critical pairs. Indeed, we have either $\alpha \supset a \cup c$ or $\alpha \supset b \cup c$. Each of these two conditions determines a unique critical pair. If $c \cap (a \cup b) \neq \emptyset$, then there are two distinct vertices $v, w \in L - (a \cup b \cup c)$ belonging to the same copy of σ_3^0. Then there is an involution without fixed points on the set of critical pairs. Indeed, $\mathbb{Z}_2$ acts on the set of the vertices of L by interchanging v and w, and it also acts on the set of critical pairs, because $v, w \notin a \cup b \cup c$. So the number of critical pairs is always even, therefore $v(F_0) = v(F_1)$.

Now let us prove that $v(f) = 1$ for certain "standard" embedding $f : CL \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (Fig. 2). To define the standard embedding $f : CL \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ take a general position collection of n lines in $\mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. For each $k = 1, \dots, n$ take a quadruple σ_k of distinct points at k-th line. Taking the join of all σ_k, we obtain an embedding $L \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$. The standard embedding $f : CL \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ is defined to be the cone of this embedding. Further we omit f from the notation of f-images. Clearly, for a pair of disjoint $(n-1)$-spheres $\alpha, \beta \subset L$ we have $C\alpha \cap C\beta = \mathrm{lk}(\alpha, \beta) \mod 2$. Let us show that $\mathrm{lk}(\alpha, \beta) = 1 \mod 2$ if and only if for each $k = 1, \dots, n$ the 0-spheres $\alpha \cap \sigma_k$ and $\beta \cap \sigma_k$ are linked in k-th copy of $\mathbb{R}^1$. Indeed, let I be the segment between the pair of points $\alpha \cap \sigma_1$. Denote $D_\alpha = I * (\alpha \cap \sigma_2) * \dots * (\alpha \cap \sigma_n)$, then $\partial D_\alpha = \alpha$. The intersection $D_\alpha \cap \beta$ is not empty $\mod 2$ if and only if the 0-spheres $\alpha \cap \sigma_1$ and $\beta \cap \sigma_1$ are linked in the first copy of $\mathbb{R}^1$. This intersection is transversal if and only if $\alpha \cap \sigma_k$ and $\beta \cap \sigma_k$ are linked in the remaining copies of $\mathbb{R}^1$. Now it is obvious that there exists exactly one pair α, β such that $\alpha \supset c$ and $C\alpha \cap C\beta = 1 \mod 2$. So $v(f) = 1$, which proves the lemma. □

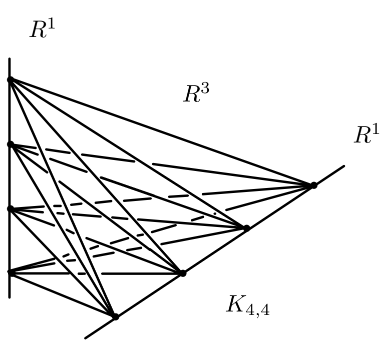

Fig. 2.

We conclude the paper by the proof of Theorem 1 in topological category (due to the referee):

Proof of Theorem 1 in the topological category. For codimension ≥ 3 the assertion of Theorem 1 in topological category follows from the one in piecewise linear category by the result of Bryant [Bry72]. Analogously to Example 3, we reduce the codimension 1 and 2 cases to the codimension 3 case. □

Acknowledgements. The author is grateful to Arkady Skopenkov for permanent interest to this work and to the referee for useful suggestions and a remark proving one of the author's conjectures.

References

[ARS01] P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov, *Embedding products of low–dimensional manifolds in* $\mathbb{R}^m$, Topol. Appl. **113** (2001), 7–12.

[Bry72] J. L. Bryant, *Approximating embeddings of polyhedra in codimension 3*, Trans. Amer. Math. Soc. **170** (1972), 85–95.

[CG83] J. Conway and C. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, Jour. Graph Theory **7** (1983), 445–453.

[FKT94] M. H. Freedman, V. S. Krushkal and P. Teichner, *Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in* $\mathbb{R}^4$, Math. Res. Letters **1** (1994), 167–176.

[Gal92] M. Galecki, *On embeddability of CW-complexes in Euclidean space*, preprint, Univ. of Tennessee, Knoxville, 1992.

[Gal93] M. Galecki, *Enchanced Cohomology and Obstruction Theory*, Doctoral Dissertation, Univ. of Tennessee, Knoxville, 1993.

[Kam32] E. R. van Kampen, *Komplexe in euklidische Raumen*, Abb. Math. Sem. Hamburg **9** (1932), 72–78; berichtigung dazu, 152–153.

[LS98] A. O. Lovasz and A. Schrijver, *A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs*, Proc. of AMS **126:5** (1998), 1275–1285.

[Men29] K. Menger, *Über plättbare Dreiergraphen und Potenzen nicht plättbarer Graphen*, Ergebnisse Math. Kolloq. **2** (1929), 30-31.

[Min94] P. Minc, *On simplicial maps and chainable continua*, Topol. Appl. **57** (1994), 1-21.

[Neg98] S. Negami, *Ramsey-type theorem for spatial graphs*, Graphs and Comb. **14** (1998), 75–80.

[ReSk99] D. Repovš and A. Skopenkov, *New results on embeddings of polyhedra and manifolds into Euclidean spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **54:6** (1999), 61–109 (in Russian); English transl., Russ. Math. Surv. **54:6** (1999), 1149–1196.

[ReSk00] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *The obstruction theory for beginners*, Mat. Prosv. **4** (2000), 154–180. (in Russian)

[ReSk01] D. Repovš and A. Skopenkov, *On contractible n-dimensional compacta, non-embeddable into* $\mathbb{R}^{2n}$, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 627–628.

[RSS95] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, *On embeddability of* $X \times I$ *into Euclidean space*, Houston J. Math **21** (1995), 199–204.

[RST93] N. Robertson, P. P. Seymor and R. Thomas, *Linkless embeddings of graphs in 3-space*, Bull. Am. Math. Soc. **28:1** (1993), 84–89.

[RST95] N. Robertson, P. P. Seymor and R. Thomas, *Sach's linkless embedding conjecture*, Jour. of Comb. Theory, Series B **64** (1995), 185–227.

[S81] H. Sachs, *On spatial representation of finite graphs*, in "Finite and infinite sets", Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai **37** (1981).

[Sch84] E. V. Ščepin, *Soft mappings of manifolds*, Russian Math. Surveys **39:5** (1984), 209–224 (in Russian).

[SSS98] J. Segal, A. Skopenkov and S. Spiez, *Embeddings of polyhedra in* $\mathbb{R}^m$ *and the deleted product obstruction*, Topol. Appl. **85** (1998), 335–344.

[SeSp92] J. Segal and S. Spiez, *Quasi-embeddings and embedding of polyhedra in* $\mathbb{R}^m$, Topol. Appl. **45** (1992), 275–282.

[ShTa] M. Shirai, K. Taniyama, *A large complete graph in a space contains a link with large link invariant*, J. Knot Th. Ram. **12:7** (2003), 915–919.

[Sko07] A. Skopenkov, *Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, in: Surveys in Contemporary Mathematics, Ed. N. Young and Y. Choi,*, London Math. Soc. Lect. Notes **347** (2007), 248–342, http://arxiv.org/abs/math.GT/0604045.

[T00] K. Taniyama, *Higher dimensional links in a simplicial complex embedded in a sphere*, Pacific Jour. of Math. **194:2** (2000), 465–467.

[Um78] B. R. Ummel, *The product of nonplanar complexes does not imbed in 4-space*, Trans. Amer. Math. Soc. **242** (1978), 319–328.

DEPT. OF DIFF. GEOMETRY, FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS, MOSCOW STATE UNIVERSITY, MOSCOW, 119992, RUSSIA

E-mail address: `skopenkov@rambler.ru`

ВЛОЖИМОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРАФОВ В ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Михаил Скопенков

Аннотация. Для любого набора графов $G_1, \dots, G_N$ мы находим минимальную размерность d, такую что произведение $G_1 \times \dots \times G_N$ вложимо в $\mathbb{R}^d$. В частности, мы доказываем, что $(K_5)^n$ и $(K_{3,3})^n$ не вложимо в $\mathbb{R}^{2n}$, где K_5 и $K_{3,3}$ — графы Куратовского. Это дает решение задачи, поставленной Менгером в 1929 году. Идея доказательства состоит в сведении к задаче так называемой рамсеевской теории зацеплений: мы показываем, что любое вложение $\mathrm{Lk}\, O \to S^{2n-1}$, где O вершина $(K_5)^n$, содержит пару зацепленных $(n-1)$-мерных сфер.

1. Введение

Наш основной результат состоит в решении проблемы Менгера из статьи [9]: мы доказываем, что $(K_5)^N \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2N}$. Более того, для данного набора графов $G_1, \dots, G_N$ мы находим минимальную размерность d, такую что $G_1 \times \dots \times G_N \hookrightarrow \mathbb{R}^d$. Мы обозначаем через K_n *полный граф* на n вершинах и через $K_{n,n}$ *полный двудольный граф* на $2n$ вершинах. Мы пишем $K \hookrightarrow \mathbb{R}^d$, если полиэдр K кусочно линейно вложим в $\mathbb{R}^d$.

Топологическая проблема вложимости является очень важной (например, см. [20, 13, 1, 24]). Наш частный случай этой задачи интересен, потому что полный ответ может быть получен и легко сформулирован, при этом доказательство нетривиально и содержит интересные идеи.

Теорема 1.1. *Пусть $G_1, \dots G_n$ — связные графы, отличные от точки, I и S^1. Минимальная размерность, такая что $G_1 \times \dots \times G_n \times (S^1)^s \times I^i \hookrightarrow \mathbb{R}^d$, равна*

$$d = \begin{cases} 2n+s+i, & \text{если } i \neq 0 \text{ или некоторый граф } G_k \text{ планарен (то есть, } G_k \not\supset K_5, K_{3,3}), \quad (1)\\ 2n+s+1, & \text{иначе.} \quad (2) \end{cases}$$

Теорема 1.1 остается верной и в топологической категории. Мы сначала доказываем Теорему 1.1 в кусочно-линейной категории и затем выводим ее топологическую версию из кусочно-линейной. Если не оговорено противное, мы работаем в кусочно-линейной категории.

Теорема 1.1 была установлена (без доказательства) в [6] (см. также [5]). Доказательство вложимости тривиально (см. ниже). Невложимость была доказана ранее в некоторых частных случаях. Например, было известно, что $Y^n \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, где Y — *триод* (символ "Y"). Красивое доказательство этого фольклорного результата представлено в [24], сравни с [15]. Также было известно, что $K_5 \times S^1 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (Том Таккер, частное сообщение). В [26] доказано, что $K_5 \times K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$; указанное доказательство содержит приблизительно 10 страниц вычислений, содержащее спектральные последовательности. Мы получаем более короткое геометрическое доказательство этого результата (см. Пример 2.2 и Лемма 3.1 ниже). Доказательство невложимости в случае (2), а именно, Лемма 3.1, является главной частью Теоремы 1.1 (в то время как случай (1) легко сводится к результату Ван Кампена).

Наше доказательство Теоремы 1.1 весьма элементарно, в частности, мы не используем абстрактной алгебраической топологии. Мы используем сведение к задаче так называемой *рамсеевской теории зацеплений* [19, 3, 22, 17, 18, 8, 11, 21, 25, 23, 12]. Классическая теорема Конвея-Гордона-Закса рамсеевской теории зацеплений утверждает, что у любого вложения K_6 в $\mathbb{R}^3$ есть пара (гомологически) зацепенных циклов. Другими словами, K_6 *не может быть незацепленно вложен в* $\mathbb{R}^3$. Граф $K_{4,4}$ обладает тем же свойством (теорема Закса, доказанная в [19]). Обозначим через σ_n^m m-мерный остов n-мерного симплекса. Для полиэдра σ обозначим через σ^{*n} джойн n копий σ. В нашем доказательстве Теоремы 1.1 мы используем следующее многомерное обобщение теоремы Закса:

1991 *Mathematics Subject Classification.* 57Q35, 57Q45.

Key words and phrases. Вложение, препятствие Ван Кампена, граф, произведение, почти вложение, незацепленное вложение, рамсеевская теория зацеплений.

Автор частично поддержан грантом ИНТАС 06-1000014-6277, грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований 05-01-00993-a, 06-01-72551-НЦНИЛ-a, 07-01-00648-a, Грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, проект НШ-4578.2006.1, программой Министерства Образования и Науки "Развитие научного потенциала высшей школы", проект РНП 2.1.1.7988, Фондом поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса".

Лемма 1.2. *У любого вложения $(\sigma_3^0)^{*n} \to S^{2n-1}$ есть пара зацепленных $(n-1)$-мерных сфер.*

Лемма 1.2 следует из Леммы 3.2 ниже. Многомерные обобщения теоремы Конвея-Гордона-Закса можно найти в [22, 21, 25].

2. Доказательство для случая (1) и некоторые эвристические рассмотрения

Сначала докажем все утверждения Теоремы 1.1, кроме утверждения о невложимости в случае (2).

Доказательство вложимости в Теореме 1.1. Нам потребуются следующие два простых результата:

(*), Если полиэдр $K \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ и $d > 0$, то $K \times I, K \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ (это утверждение достаточно доказать для $K = \mathbb{R}^d \cong \operatorname{Int} D^d$, для которого оно тривиально).

(**) Для любого d-полиэдра K^d цилиндр $K^d \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ [16].

Положим $G = G_1 \times \dots \times G_n$. По общему положению $G \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. Если $i \neq 0$, то согласно утверждению (**) имеем $G \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. И если, скажем, $G_1 \subset D^2$, то согласно (**) получаем $D^2 \times G_2 \times \dots \times G_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, откуда $G \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Применяя утверждение (*) достаточное количество раз, мы получаем доказательство утверждения вложимости во всех случаях. $\square$

Доказательство невложимости в случае (1). Заметим, что любой связный граф, отличный от точки, I и S^1, содержит триод Y. Таким образом достаточно показать, что $Y^n \times I^{s+i} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+s+i-1}$. Так как $CK \times CL \cong C(K * L)$ и $K * \sigma_0^0 = CK$ для любых полиэдров K и L, то

$$Y^n \times I^{s+i} = (C\sigma_2^0)^n \times (C\sigma_0^0)^{s+i} \cong \underbrace{C \dots C}_{s+i+1 \text{ раз}} (\sigma_2^0)^{*n}.$$

Если полиэдр $K \not\hookrightarrow S^d$, то конус $CK \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ (потому что мы работаем в кусочно-линейной категории). Таким образом, невложимость в случае (1) следует из $(\sigma_2^0)^{*n} \not\hookrightarrow S^{2n-2}$ [7] (а также из $Y^n \not\hookrightarrow S^{2n-1}$ [24]). $\square$

Таким образом, нам осталось доказать невложимость в случае (2). Чтобы сделать наше рассуждение более понятным, мы предварим его эвристическим рассмотрением трех простейших случаев.

Пример 2.1. Докажем сначала, что граф Куратовского K_5 не планарен. Предположим, что $K_5 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть O — вершина графа K_5 и D — малый диск с центром O. Тогда пересечение $K_5 \cap \partial D$ состоит из 4 точек. Обозначим их через A, B, C, D, в порядке следования на границе ∂D (по часовой стрелке). Отметим, что пары A, C и B, D являются концами двух непересекающихся дуг, содержавшихся в $K_5 - \operatorname{Int} D$, и, следовательно, в $\mathbb{R}^2 - \operatorname{Int} D$. Поэтому циклы $OAC, OBD \subset K_5$ пересекают друг друга трансверсально ровно в одной точке O, что невозможно на плоскости. Значит, $K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

Пример 2.2. Теперь обрисуем в общих чертах доказательство того, что $K_5 \times K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$. (Другое доказательство дано в [26]). Напомним, что если K — полиэдр и $O \in K$ является вершиной, то *звезда* $\mathrm{St}O$ есть объединение всех замкнутых клеток полиэдра K, содержащих O, а *линк* $\mathrm{Lk}O$ есть объединение всех замкнутых клеток звезды $\mathrm{St}O$, не содержащих O. В нашем предыдущем примере $\mathrm{Lk}O$ состоял из 4 точек, и доказательство было основано на том факте, что есть две пары точек линка $\mathrm{Lk}O$, зацепленных в ∂D. Теперь возьмем $K = K_5 \times K_5$. Мы получаем $\mathrm{Lk}O \cong K_{4,4}$. Следовательно, по теореме Закса, приведенной во введении, у любого вложения $\mathrm{Lk}O \hookrightarrow \partial D^4$ есть пара зацепленных циклов $\alpha, \beta \in \mathrm{Lk}O$. Таким образом, мы можем доказать, что $K \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$ аналогично Примеру 2.1, если мы построим две непересекающиеся поверхности в полиэдре $K - \mathrm{St}O$ с краями α и β соответственно. Это построение несложно, детали приведены в доказательстве Леммы 3.1 ниже. Аналогично этому можно показать, что $\sigma_6^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$ (другое доказательство дано в [7]).

Пример 2.3. Докажем, что $K_5 \times S^1 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$. (Другое доказательство было дано Томом Таккером; этот факт можно доказать также аналогично Примеру 2.2). Предположим, что $K_5 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$; тогда согласно утверждению (*) получаем $K_5 \times S^1 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Но $S^1 \times S^1 \supset K_5$, таким образом $K_5 \times K_5 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, что противоречит Примеру 2.2.

3. Доказательство невложимости в случае (2)

Доказательство невложимости в случае (2) по модулю некоторых лемм. Будем говорить, что кусочно линейное отображение $f : K \to L$ между двумя полиэдрами K и L с фиксированными триангуляциями является *почти вложением*, если для любых двух *непересекающихся* замкнутых клеток $a, b \subset K$ мы имеем $fa \cap fb = \emptyset$ [4].

Лемма 3.1. *(для $n = 2$ [26]) Полиэдр $(K_5)^n$ не является почти вложимым в $\mathbb{R}^{2n}$.*

Доказательство невложимости в случае (2) *Теоремы 1.1 по модулю Леммы 3.1.* Согласно критерию Куратовского планарности графов любой непланарный граф содержит подграф, гомеоморфный либо K_5, либо $K_{3,3}$. Таким образом, мы можем предположить, что каждый G_k является либо графом K_5, либо графом $K_{3,3}$. Рассуждая аналогично Примеру 2.3 мы можем свести все к случаю $s = 0$. Будем считать, что $s = 0$. Теперь мы собираемся заменить все графы $K_{3,3}$ на K_5.

Отметим, что граф K_5 почти вложим в граф $K_{3,3}$ (иллюстрация 1). Действительно, отобразим вершину графа K_5 в середину ребра графа $K_{3,3}$, а остальные четыре вершины — на четыре вершины графа $K_{3,3}$, не принадлежащих этому ребру. Отобразим каждое ребро e графа K_5 на кратчайшую (в смысле числа вершин) дугу в $K_{3,3}$, соединяющую образы концов ребра e. Требуемое почти вложение построено.

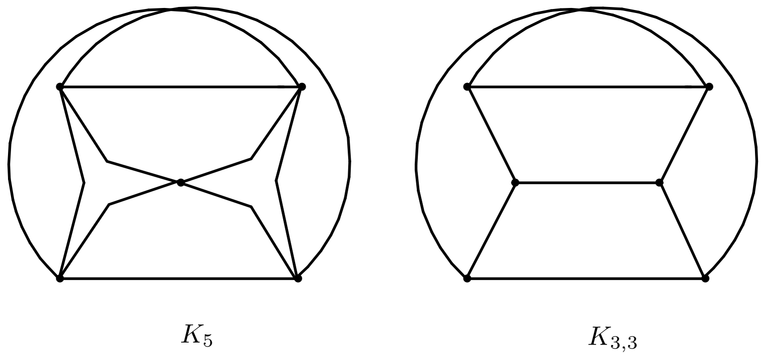

Рис. 1. Почти вложение графа K_5 в граф $K_{3,3}$

Теперь заметим, что произведение почти вложений является почти вложением, и композиция почти вложения и вложения является почти вложением. Значит, невложимость в случае (2) Теоремы 1.1 следует из Леммы 3.1. $\square$

Для доказательства Леммы 3.1 нам потребуется следующее понятие. Пусть A, B — пара кусочно-линейных n-мерных многообразий с краем, и пусть $f : A \to \mathbb{R}^{2n}$, $g : B \to \mathbb{R}^{2n}$ — пара кусочно-линейных отображений, таких что $f\partial A \cap g\partial B = \emptyset$. Возьмем пару кусочно-линейных отображений $\bar{f} : A \to \mathbb{R}^{2n}$ и $\bar{g} : B \to \mathbb{R}^{2n}$ общего положения, близких к f и к g, соответственно. Тогда $\mod 2$-*индексом пересечения* $fA \cap gB$ назовем число точек $\mod 2$ в множестве $\bar{f}A \cap \bar{g}B$. Мы собираемся использовать следующий простой результат:

(***) если A и B — замкнутые многообразия, то $fA \cap gB = 0$.

(Это следует из обращения в нуль гомологической формы пересечения пространства $\mathbb{R}^{2n}$). Лемма 3.1 будет выведена из следующего обобщения Леммы 1.2:

Лемма 3.2. *Пусть $L = (\sigma_3^0)^{*n}$. Тогда для любого почти вложения $CL \to \mathbb{R}^{2n}$ найдутся две непересекающиеся $(n-1)$-мерные сферы $\alpha, \beta \subset L$, такие что индекс пересечения $fC\alpha \cap fC\beta = 1$.*

Доказательство Леммы 3.1 по модулю Леммы 3.2. Предположим, что существует почти вложение $f : K = K_5 \times \cdots \times K_5 \to \mathbb{R}^{2n}$. Пусть $O = O_1 \times \cdots \times O_n$ — вершина полиэдра K. По известной формуле для линка вершины

$$\mathrm{Lk}O \cong \mathrm{Lk}O_1 * \cdots * \mathrm{Lk}O_n \text{ и } \mathrm{St}O = C\mathrm{Lk}O \cong C(\sigma_3^0)^{*n}.$$

Пусть $\alpha, \beta \subset \mathrm{Lk}O$ — пара $(n-1)$-мерных сфер, предоставляемых Леммой 3.2. Отождествим $\mathrm{Lk}O$ и $\mathrm{Lk}O_1 * \cdots * \mathrm{Lk}O_n$. Так как α и β не пересекаются, то для каждого $k = 1, \ldots, n$ множества $\alpha \cap \mathrm{Lk}O_k$ и $\beta \cap \mathrm{Lk}O_k$ не пересекаются, и каждое из них состоит ровно из 2 точек. По определению положим $\{A_k, C_k\} := \alpha \cap \mathrm{Lk}O_k$ и $\{B_k, D_k\} := \beta \cap \mathrm{Lk}O_k$. Рассмотрим два n-мерных тора

$$T_\alpha = O_1A_1C_1 \times \cdots \times O_nA_nC_n \text{ и } T_\beta = O_1B_1D_1 \times \cdots \times O_nB_nD_n,$$

содержащихся в полиэдре K.

Ясно, что $T_\alpha \supset C\alpha$, $T_\beta \supset C\beta$ и $T_\alpha \cap T_\beta = O$. Так как f — почти вложение, то $fT_\alpha \cap fT_\beta = fC\alpha \cap fC\beta$. Значит, $fT_\alpha \cap fT_\beta = 1$ по выбору α и β. Тем самым мы получаем противоречие с утверждением (***). Таким образом, $K \not\to \mathbb{R}^{2n}$. $\square$

Доказательство Леммы 3.2. Доказательство аналогично доказательству теоремы Конвея-Гордона-Закса и основано на ключевой идее работы [7], только мы используем более тонкое препятствие. Читатель может ограничиться рассмотрением случая $n = 2$, и получить таким образом

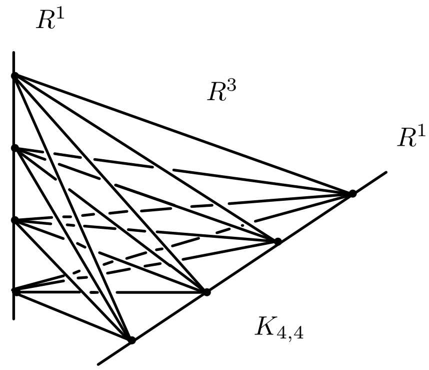

Рис. 2. Построение 'стандартного' почти вложения $CK_{4,4} \to \mathbb{R}^4$

альтернативное доказательство теоремы Закса. (Доказательство для $n > 2$ полностью аналогично таковому для $n = 2$).

Мы покажем, что для любого $(n-1)$-мерного симплекса c полиэдра L и любого почти вложения $f : CL \to \mathbb{R}^{2n}$ существует пара непересекающихся $(n-1)$-мерных сфер $\alpha, \beta \subset L$, таких что $\alpha \supset c$ и индекс пересечения $fC\alpha \cap fC\beta = 1$.

Для почти вложения $f : CL \to \mathbb{R}^{2n}$ обозначим через $v(f) = \sum(fC\alpha \cap fC\beta) \mod 2$ *препятствие Ван Кампена* к незацепленной вложимости. Здесь сумма берется по всем парам непересекающихся $(n-1)$-мерных сфер $\alpha, \beta \subset L$, таких что $c \subset \alpha$. Достаточно доказать, что $v(f) = 1$. Наше доказательство состоит из 2 шагов: сначала мы покажем, что $v(f)$ не зависит от f, а потом вычислим $v(f)$ для некоторого "стандартного" вложения $f : CL \to \mathbb{R}^{2n}$.

Докажем, что $v(f)$ не зависит от f (сравни с [7, 3]). Возьмем любые два почти вложения $F_0, F_1 : CL \to \mathbb{R}^{2n}$. По общему положению в кусочно линейной категории, существует гомотопия $F : I \times CL \to \mathbb{R}^{2n}$ между ними, такая что

1) существует только конечное число *особых* моментов времени t, то есть моментов $t \in I$, таких что F_t не есть почти вложение;

2) для каждого особого t найдется ровно одна пара непересекающихся $(n-1)$-мерных симплексов $a, b \subset L$, таких что $F_t Ca \cap F_t b \neq \emptyset$;

3) пересечение $F_t Ca \cap F_t b$ является "трансверсальным во времени", то есть пересечение $F(t \times Ca) \cap F([t-\varepsilon, t+\varepsilon] \times b)$ трансверсально для некоторого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим особый момент t. Свойство 3) означает, что индекс пересечения $F_t C\alpha \cap F_t C\beta$ пары непересекающихся $(n-1)$-мерных сфер $\alpha, \beta \subset L$ изменяется при увеличении t, если и только если либо $\alpha \supset a$, и $\beta \supset b$, либо $\alpha \supset b$ и $\beta \supset a$. Такие пары (α, β), удовлетворяющие дополнительному условию $\alpha \supset c$, мы назовем *критическими*. Если $c \cap (a \cup b) = \emptyset$, то существуют ровно 2 критические пары. Действительно, мы имеем $\alpha \supset a \cup c$ или $\alpha \supset b \cup c$. Каждый из этих двух условий определяют единственную критическую пару. Если же $c \cap (a \cup b) \neq \emptyset$, то существуют две различные вершины $v, w \in L - (a \cup b \cup c)$, принадлежащие одной и той же копии σ_3^0 в рассматриваемом джойне. Тем самым найдется инволюция на множестве критических пар, не имеющая неподвижных точек. Действительно, $\mathbb{Z}_2$ действует на множество вершин L, меняя местами v и w, что определяет действие на множестве критических пар, потому что $v, w \notin a \cup b \cup c$. Значит, число критических пар четно, поэтому $v(F_0) = v(F_1)$.

Теперь докажем, что $v(f) = 1$ для некоторого "стандартного" вложения $f : CL \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (см. иллюстрацию 2). Определим стандартное вложение $f : CL \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Возьмем набор n прямых общего положения в пространстве $\mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ возьмем четверку σ_k точек на k-й прямой. Рассматривая джойн всех четверок σ_k, мы получим вложение $L \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$. Стандартное вложение $f : CL \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ определяется как конус над построенным вложением. В дальнейшем мы будем опускать f для обозначений f-образов. Ясно, что для пары непересекающихся $(n-1)$-мерных сфер $\alpha, \beta \subset L$ мы имеем $C\alpha \cap C\beta = \mathrm{lk}(\alpha, \beta) \mod 2$. Покажем, что $\mathrm{lk}(\alpha, \beta) = 1 \mod 2$, если и только если для каждого $k = 1, \ldots, n$ 0-мерные сферы $\alpha \cap \sigma_k$ и $\beta \cap \sigma_k$ зацеплены на k-й прямой $\mathbb{R}^1$. Действительно, пусть I — отрезок, соединяющий пару точек $\alpha \cap \sigma_1$. Обозначим $D_\alpha = I * (\alpha \cap \sigma_2) * \cdots * (\alpha \cap \sigma_n)$, тогда $\partial D_\alpha = \alpha$. Пересечение $D_\alpha \cap \beta$ не пусто $\mod 2$, если и только если 0-мерные сферы $\alpha \cap \sigma_1$ и $\beta \cap \sigma_1$ зацеплены на первой прямой $\mathbb{R}^1$. Это пересечение трансверсально, если и только если $\alpha \cap \sigma_k$ и $\beta \cap \sigma_k$ зацеплены на всех остальных прямых $\mathbb{R}^1$. Теперь очевидно, что существует ровно одна пара α, β, такая что $\alpha \supset c$ и $C\alpha \cap C\beta = 1 \mod 2$. Значит, $v(f) = 1$, что доказывает лемму. $\square$

В заключение приводим доказательство Теоремы 1.1 в топологической категории (принадлежащее рецензенту журнала Fundamenta Mathematicae):

Доказательство Теоремы 1.1 в топологической категории. Для коразмерности ≥ 3 утверждение Теоремы 1.1 в топологической категории следует из утверждения этой теоремы в кусочно линейной категории, ввиду результата Брианта [2]. Аналогично Примеру 2.3, мы сводим случаи коразмерности 1 и 2 к случаю коразмерности 3. □

Благодарности. Автор благодарен А. Скопенкову за постоянное внимание к данной работе, а также рецензенту журнала Fundamenta Mathematicae за полезные предложения и замечание, доказывающее одно из предположений автора.

Список литературы

1. P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov, *Embedding products of low–dimensional manifolds in* $\mathbb{R}^m$, Topol. Appl. **113** (2001), p. 7–12.
2. J. L. Bryant, *Approximating embeddings of polyhedra in codimension 3* , Trans. Amer. Math. Soc. **170** (1972), p. 85–95.
3. J. Conway and C. Gordon, *Knots and links in spatial graphs* , Jour. Graph Theory **7** (1983), p. 445–453.
4. M. H. Freedman, V. S. Krushkal and P. Teichner , *Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in* $\mathbb{R}^4$, Math. Res. Letters **1** (1994), p. 167–176.
5. M. Galecki, *On embeddability of CW-complexes in Euclidean space*, preprint Univ. of Tennessee, Knoxville (1992).
6. M. Galecki, *Enchanced Cohomology and Obstruction Theory*, Doctoral Dissertation, Univ. of Tennessee, Knoxville (1993).
7. E. R. van Kampen, *Komplexe in euklidische Raumen* , Abb. Math. Sem. Hamburg **9** (1932), p.72–78, berichtigung dazu, 152–153.
8. A. O. Lovasz and A. Schrijver, *A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs* , Proc. of AMS **126:5** (1998), p.1275–1285.
9. K. Menger, *Über plättbare Dreiergraphen und Potenzen nicht plättbarer Graphen* , Ergebnisse Math. Kolloq. **2** (1929), p. 30-31.
10. P. Minc, *On simplicial maps and chainable continua* , Topol. Appl. **57** (1994), p. 1-21.
11. S. Negami, *Ramsey-type theorem for spatial graphs* , Graphs and Comb. **14** (1998), p. 75–80.
12. V. Prasolov and M. Skopenkov, *Ramsay theory of knots and links*, Matematicheskoe Prosveschenie 3rd series **9** (2005), p. 108–115 (in Russian).
13. D. Repovš and A. Skopenkov, *New results on embeddings of polyhedra and manifolds into Euclidean spaces* , Uspekhi Mat. Nauk **54:6** (1999), p. 61–109 (in Russian). English transl.: Russ. Math. Surv. **54:6** (1999), p. 1149–1196.
14. D. Repovš and A. B. Skopenkov, *The obstruction theory for beginners* , Mat. Prosv. **4** (2000), p. 154–180 (in Russian).
15. D. Repovš and A. Skopenkov, *On contractible* n*-dimensional compacta, non-embeddable into* $\mathbb{R}^{2n}$, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), p. 627–628.
16. D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, *On embeddability of* $X \times I$ *into Euclidean space* , Houston J. Math **21** (1995), p. 199–204.
17. N. Robertson, P. P. Seymor and R. Thomas, *Linkless embeddings of graphs in 3-space* , Bull. Am. Math. Soc. **28:1** (1993), p. 84–89.
18. N. Robertson, P. P. Seymor and R. Thomas, *Sach's linkless embedding conjecture* , Jour. of Comb. Theory, Series B **64** (1995), p. 185–227.
19. H. Sachs , *On spatial representation of finite graphs,* in "Finite and infinite sets", Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai **37** (1981).
20. E. V. Ščepin, *Soft mappings of manifolds*, Russian Math. Surveys **39:5** (1984), p. 209–224 (in Russian).
21. J. Segal, A. Skopenkov and S. Spiez, *Embeddings of polyhedra in* $\mathbb{R}^m$ *and the deleted product obstruction*, Topol. Appl. **85** (1998), p. 335–344.
22. J. Segal and S. Spiez, *Quasi-embeddings and embedding of polyhedra in* $\mathbb{R}^m$, Topol. Appl. **45** (1992), p. 275–282.
23. M. Shirai, K. Taniyama, *A large complete graph in a space contains a link with large link invariant,* J. of Knot Theory and Its Ramifications **12:7** (2003), p. 915–919.
24. A. Skopenkov, *Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces*, in: *Surveys in Contemporary Mathematics, Ed. N. Young and Y. Choi*, London Math. Soc. Lect. Notes **347** (2007), p. 248–342, http://arxiv.org/abs/math.GT/0604045
25. K. Taniyama, *Higher dimensional links in a simplicial complex embedded in a sphere* , Pacific Jour. of Math. **194:2** (2000), p. 465–467.
26. B. R. Ummel, *The product of nonplanar complexes does not imbed in 4-space* , Trans. Amer. Math. Soc. **242** (1978), p. 319–328.

Department of Differential Geometry, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Moscow, Russia 119992, and Independent University of Moscow, B. Vlasyevsky, 11, 119002, Moscow, Russia.
E-mail address: skopenkov@rambler.ru